

Kolokwium nr 2. z 9 stycznia 2025 — rozwiązania wzorcowe

Uwaga: Przedstawione poniżej rozwiązania nie są jedynymi możliwymi rozwiązaniami, za które można było uzyskać maksymalną liczbę punktów.

Zadanie 1. W zależności od parametrów $a, b \in \mathbb{R}$ rozstrzygnąć, czy funkcja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(x, y) = (\sin x + 1)(ay + 1) + b(2x - e^y(x + 1)^2) - x$$

ma w punkcie $(0, 0)$ ekstremum lokalne. Jeśli tak, określić rodzaj tego ekstremum.

Rozwiązanie.

Znajdźmy najpierw gradient funkcji f w punkcie $(0, 0)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= (ay + 1) \cos x + 2b(1 - e^y(x + 1)) - 1, & \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= a(\sin x + 1) - b e^y(x + 1)^2, & \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= a - b. \end{aligned}$$

Warunkiem koniecznym by funkcja f miała w $(0, 0)$ ekstremum jest zerowanie się gradientu f , czyli $\nabla f(0, 0) = [0, a - b] = [0, 0]$. Stąd wynika, że $a = b$.

Aby określić charakter ekstremum policzmy drugą pochodną funkcji f w punkcie $(0, 0)$. Mamy (dla $a = b$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= -(ay + 1) \sin x - 2a e^y, & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) &= -2a, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= a \cos x - 2a(x + 1) e^y, & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) &= -a \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= -a e^y(x + 1)^2, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) &= -a. \end{aligned}$$

Zatem

$$D^2 f(0, 0) = \begin{bmatrix} 2a & -a \\ -a & -a \end{bmatrix}.$$

Wyznaczniki minorów $D^2 f(0, 0)$ są równe $-2a$ oraz a^2 . Ponieważ wyznacznik jest dodatni dla $a \neq 0$, a pierwszy minor jest ujemny dla $a < 0$ i dodatni dla $a > 0$, to (z kryterium Sylwestera) $D^2 f(0, 0)$ jest ujemnie określona dla $a < 0$, czyli f ma wówczas maksimum lokalne w $(0, 0)$. Dla $a > 0$ macierz $D^2 f(0, 0)$ jest dodatnio określona, a zatem f ma minimum lokalne w $(0, 0)$.

Pozostaje do rozstrzygnięcia przypadek $a = b = 0$ gdy macierz $D^2 f(0, 0)$ jest nieujemnie i niedodatnio określona. Dla $a = b = 0$ mamy

$$f(x, y) = \sin x + 1 - x = 1 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3).$$

Zatem, w otoczeniu $x = 0$ funkcja f jest większa od $f(0, 0) = 1$ dla $-\varepsilon < x < 0$ i mniejsza do 1 dla $0 < \varepsilon$, dla pewnego $\varepsilon > 0$. To oznacza, że f nie ma w $(0, 0)$ ekstremum dla $a = b = 0$.

Zadanie 2. Funkcja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna i spełnia

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - \exp((x + 2y)^2) + 5 \sin^2(y)}{x^2 + y^2} = 1.$$

- Wyznaczyć wielomian Taylora stopnia 2 funkcji f wokół punktu $(0, 0)$.
- Uzasadnić, że punkt $(0, 0)$ jest punktem krytycznym funkcji f .
- Rozstrzygnąć, czy funkcja f ma w punkcie $(0, 0)$ ekstremum lokalne.

Rozwiązanie.

Zauważmy, że jeśli $W(x, y)$ jest wielomianem Taylora stopnia 2 funkcji f , to $\frac{f(x, y) - W(x, y)}{x^2 + y^2} \rightarrow 0$ dla $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. Dlatego wielomian Taylora stopnia 2 funkcji f jest taki sam jak wielomian Taylora stopnia 2 funkcji

$$g(x, y) = \exp((x + 2y)^2) - 5 \sin^2(y) + x^2 + y^2.$$

Korzystając ze znanych rozwinięć funkcji wykładniczej i sinusa, otrzymujemy

$$\begin{aligned} g(x, y) &= 1 + (x + 2y)^2 + o((x + 2y)^2) - 5(y - o(y))^2 + x^2 + y^2 = \\ &= 1 + x^2 + 4xy + 4y^2 - 5y^2 + x^2 + y^2 + o(x^2 + y^2) = \\ &= 1 + 2x^2 + 4xy + o(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

Stąd wielomian stopnia 2 funkcji f w $(0, 0)$ jest równy $1 + 2x^2 + 4xy$.

Ponieważ wielomian W nie ma składników liniowych, to oznacza, że gradient f zeruje się w $(0, 0)$, a zatem $(0, 0)$ jest punktem krytycznym funkcji f . Z postaci wielomianu możemy też odczytać postać drugiej pochodnej f w $(0, 0)$. Drugie pochodne względem x^2 i y^2 to współczynniki przy, odpowiednio, x^2 oraz y^2 pomnożone przez 2, zaś pochodne mieszane są równe współczynnikowi przy xy . Zatem

$$D^2 f(0, 0) = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Łatwo zauważyć, że $D^2 f(0, 0)$ jest nieokreślona, bo ma ujemny wyznacznik (więc wartości własne są różnych znaków). Zatem f nie ma w $(0, 0)$ ekstremum.

Zadanie 3. a) Wykazać, że istnieje $\varepsilon > 0$ oraz funkcja $z : (-\varepsilon, \varepsilon) \times (2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ klasy C^1 , taka że $z(0, 2) = 1$ oraz równanie

$$(x + 2)y \cdot z(x, y) - y^2 \cdot z^{25}(x, y) = x^3$$

spełnione jest dla wszystkich $|x| < \varepsilon, |y - 2| < \varepsilon$.

b) Znaleźć stoeżek styczny do wykresy funkcji z w punkcie $(0, 2)$.

c) Uzasadnić, że funkcja z jest klasy C^∞ na pewnym otoczeniu punktu $(0, 2)$.

Rozwiązanie.

Niech

$$F(x, y, z) = (x + 2)yz - y^2 z^{25} - x^3.$$

Oczywiście F jest klasy C^∞ oraz $F(0, 2, 1) = 0$. Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) &= yz - 3x^2, & \frac{\partial F}{\partial x}(0, 2, 1) &= 2, \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) &= (x + 2)z - 2yz^{25}, & \frac{\partial F}{\partial y}(0, 2, 1) &= -2, \\ \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) &= (x + 2)y - 25y^2 z^{24}, & \frac{\partial F}{\partial z}(0, 2, 1) &= -96. \end{aligned}$$

Ponieważ $\frac{\partial F}{\partial z}(0, 2, 1) \neq 0$, to z twierdzenie o funkcji uwikłanej istnieje funkcje z opisana w treści punktu

a). Ponieważ F jest klasy C^∞ funkcja z jest tej samej klasy (określona na odpowiednio małym otoczeniu punktu $(0, 2)$) — co było uzasadnione na wykładzie.

Pozostaje nam do znalezienia stożek styczny. Zauważmy, że wykres funkcji $z(x, y)$ jest (w otoczeniu punktu $(x, y, z) = (0, 2, 1)$ poziomica funkcji F , zatem przestrzeń styczna (stożek styczny) do wykresu funkcji z w punkcie $p = (0, 1, 2)$ jest prostopadła do gradientu funkcji F , czyli jest równa

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : [2, -2, -23] \cdot [x, y, z] = 2x - 2y - 23z = 0 \right\}.$$

Uwaga

W sformułowanym na wykładzie twierdzeniu zakładaliśmy, że F jest klasy C^1 , a w tezie otrzymywaliśmy, że rozwikłana funkcja (tutaj z) jest też klasy C^1 . Później uzasadnialiśmy, że jeśli F jest klasy C^k , to z też jest tej samej klasy. Dla porządku, zapiszę tutaj uzasadnienie tego faktu, bo nie znalazło się ono w notatkach. Zauważmy, że z twierdzenia o funkcji uwikłanej (udowodnionego na wykładzie, dla F klasy C^1), a konkretniej ze wzoru na pochodną z wynika, że pochodne cząstkowe z są funkcjami wymiernymi pochodnych cząstkowych funkcji F , gdzie w mianowniku znajduje się wyznacznik różniczkowy F względem odpowiednich zmiennych (w naszym zadaniu względem z), który jest niezerowy na otoczeniu danego punktu. Jeśli F jest klasy C^k , $k > 1$, to jej pochodne cząstkowe są klasy C^{k-1} . Ponieważ wiemy, że z jest klasy C^1 , to pochodne pochodnych cząstkowych są ciągłe, zatem drugie pochodne z są ciągłe. Rozumując indukcyjnie dowodzimy, że z jest klasy C^k . Oczywiście, jeśli F jest klasy C^∞ , to rozumowanie indukcyjne implikuje, że z też jest tej klasy.

W tym zadaniu jest jeszcze prościej, bo zarówno licznik jak i mianownik są po prostu wielomianem od x, y i z . A zatem, drugie pochodne cząstkowe z względem x i y to będą funkcje wymierne, gdzie w liczniku mamy wielomian od x, y, z i pochodnych cząstkowych z a w mianowniku wielomian od x, y, z , który się nie zeruje na otoczeniu punktu $(0, 2)$. Ponieważ pochodne cząstkowe z są ciągłe, to drugie pochodne cząstkowe z są ciągłe, czyli z jest klasy C^2 . Rozumowanie indukcyjne dowodzi, że z jest klasy C^∞ .

Zadanie 4. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0, n]} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \frac{x^n}{x^{n+2} + 1} e^{-x} d\lambda_1(x).$$

Rozwiązanie.

Oznaczmy $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \frac{x^n}{x^{n+2} + 1} e^{-x} \chi_{[0, n]}(x)$ dla $x \geq 0$, gdzie $\chi_{[0, n]}$ oznacza funkcję charakterystyczną zbioru $[0, n]$. Zauważmy, po pierwsze, że $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq e^x$ dla wszystkich $x \geq 0$. Po drugie

$$\frac{x^n}{x^{n+2} + 1} \leq \begin{cases} x^n \leq 1 & \text{dla } x \in [0, 1] \\ \frac{x^n}{x^{n+2}} = \frac{1}{x^2} & \text{dla } x > 1. \end{cases}$$

A zatem $0 \leq f_n(x) \leq \min\left\{1, \frac{1}{x^2}\right\} = g(x)$ dla wszystkich $x \geq 0$. Ponieważ

$$\int_{[0, \infty)} \min\left\{1, \frac{1}{x^2}\right\} d\lambda_1(x) = \int_0^1 dx + \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = 1 - \frac{1}{x} \Big|_1^\infty = 1 - (0 - 1) = 2,$$

to f_n majoryzują się przez g . Zatem z twierdzenia o zbieżności zmajoryzowanej mamy

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0, \infty)} f_n d\lambda_1 = \int_{[0, \infty)} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n d\lambda_1.$$

Policzmy granicę punktową ciągu f_n . Oczywiście mamy $(1 + \frac{x}{n})^n \rightarrow e^x$. Z drugiej strony, jeśli $x \in [0, 1)$, to $\frac{x^n}{x^{n+2}+1} \rightarrow 0$. Jeśli $x = 1$, to $\frac{x^n}{x^{n+2}+1} = \frac{1}{2}$. Jeśli $x > 1$, to

$$\frac{x^n}{x^{n+2}+1} = \frac{1}{x^2 + \frac{1}{x^n}} \rightarrow \frac{1}{x^2}.$$

Zatem

$$\int_{[0, \infty)} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n d\lambda_1 = \int_0^1 0 dx + \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = 0 + 0 + 1 = 1.$$

Zadanie 5. a) Załóżmy, że μ jest miarą na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, taką że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $\mu([n^2, (n+1)^2)) = \frac{1}{2^n}$. Wykazać, że

$$2 \leq \int_{[1, \infty)} \sqrt{x} d\mu(x) < 3.$$

b) Niech $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ będą mierzalne oraz $f_n \rightarrow f$ prawie wszędzie (względem miary λ_1) dla pewnej funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Wykazać, że jeśli

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n^2(x)(1+x^2) d\lambda_1(x) < \infty,$$

to funkcja f jest całkowalna na $\mathbb{R}$ (względem miary λ_1).

Przypomnienie: $\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$ dla $|q| < 1$; $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ to rodzina podzbiorów borelowskich $\mathbb{R}$.

Rozwiązanie.

a) Z addytywności całki względem sumy zbiorów mamy

$$I = \int_{[1, \infty)} \sqrt{x} d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[n^2, (n+1)^2)} \sqrt{x} d\mu(x).$$

Oczywiście na zbiorze $[n^2, (n+1)^2)$ zachodzi oszacowanie $n \leq \sqrt{x} < n+1$. A zatem

$$\begin{aligned} I &< \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[n^2, (n+1)^2)} (n+1) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \mu([n^2, (n+1)^2)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} = \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{2^{k-1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^{k-1}} - 1 = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} - 1 = 3. \end{aligned}$$

Oszacowanie z dołu jest podobne

$$I \geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[n^2, (n+1)^2)} n d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \mu([n^2, (n+1)^2)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = 2.$$

b) zauważmy, że funkcja pod całką jest nieujemna, więc z lematu Fatou mamy

$$\infty > \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n^2(x)(1+x^2) d\lambda_1(x) \geq \int_{\mathbb{R}} \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n^2(x)(1+x^2) d\lambda_1(x) = \int_{\mathbb{R}} f^2(x)(1+x^2) d\lambda_1(x).$$

Wykażemy, że f jest całkowalna, czyli

$$\int_{\mathbb{R}} f^2(x)(1+x^2) d\lambda_1(x) < \infty \implies \int_{\mathbb{R}} |f(x)| d\lambda_1(x) < \infty.$$

Wersja pierwsza (teorio miarowa) rozwiązania

Idea. Zauważmy, że jeśli $|f(x)|(1+x^2) \leq 1$, to f możemy z góry oszacować przez $\frac{1}{1+x^2}$, która jest całkowalna. Natomiast jeśli $|f(x)|(1+x^2) \geq 1$, to po przemnożeniu stronami przez $|f|$ dostajemy oszacowanie $|f|$ przez $f^2(x)(1+x^2)$, która jest całkowalna z założeń zadania.

Oznaczmy

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : |f(x)|(1+x^2) \leq 1 \right\}, \quad B = \mathbb{R} \setminus A.$$

Zauważmy, że na zbiorze B zachodzi $|f(x)|(1+x^2) > 1$, czyli $|f(x)| < f^2(x)(1+x^2)$. A zatem

$$\int_B |f| d\lambda_1 \leq \int_B f^2(x)(1+x^2) d\lambda_1(x) \leq \int_{\mathbb{R}} f^2(x)(1+x^2) d\lambda_1(x) < +\infty.$$

Na zbiorze A zachodzi $|f(x)| \leq \frac{1}{1+x^2}$. A zatem

$$\int_A |f| d\lambda_1 \leq \int_A \frac{1}{1+x^2} d\lambda_1(x) \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} d\lambda_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi.$$

Wykazaliśmy zatem, że

$$\int_{\mathbb{R}} |f| d\lambda_1 = \int_A |f| d\lambda_1 + \int_B |f| d\lambda_1 < \infty,$$

a zatem f jest całkowalna.

Wersja druga rozwiązania — punktowe oszacowanie z nierówności między średnimi

Idea. Chcemy oszacować $|f(x)|$ punktowo z dołu. Wiemy, że całka z $f^2(x)(1+x^2)$ jest skończona. Spróbujmy oszacować $|f(x)|$ korzystając ze znanego oszacowania z nierówności między średnimi: $|a||b| \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$. Chcemy by $a^2 = f^2(x)(1+x^2)$. Skoro $|ab| = |f(x)|$, to $b = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Zauważmy, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi następująca nierówność

$$|f(x)| = |f(x) \sqrt{1+x^2}| \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq \frac{1}{2} \left(f^2(x)(1+x^2) + \frac{1}{1+x^2} \right).$$

Wykazaliśmy już, że $\int_{\mathbb{R}} f^2(x)(1+x^2) d\lambda_1(x) < +\infty$. Wiemy też, że

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} d\lambda_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi < \infty.$$

Stąd mamy

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)| d\lambda_1(x) \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} f^2(x)(1+x^2) d\lambda_1(x) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} d\lambda_1(x) < +\infty,$$

co dowodzi, że funkcja f jest całkowalna.